

溶解炉における電磁攪拌シミュレーションの開発

Development of a Simulation Model for Electromagnetic Stirring in Melting Furnace

高橋 功一
Koichi Takahashi

石川 宣仁
Nobuhito Ishikawa

概要 アルミニウム溶湯製造時の溶解炉や保持炉などで、溶解速度や攪拌混合速度の向上を目的として幅広く実用化されている電磁攪拌装置を長期間使用し続けた場合に電磁攪拌効果が低下する現象があり、その低下要因の1つとして、炉床耐火物の損耗によるアルミニウム浸透現象が考えられている。本研究では、電磁攪拌効果の低下を定量的に評価するため、溶解炉内の電磁場解析モデルおよびアルミニウム塊の溶解を考慮した熱流動解析モデルを構築した。電磁場解析により、炉床耐火物へのアルミニウム浸透に起因する炉内の発生磁場の減衰を立証し、さらに熱流動解析により、磁場減衰に伴うアルミニウム溶湯流動の低下によるアルミニウム塊の溶解遅れを定量的に示すことができた。

Abstract: Electromagnetic stirrers (EMSs) are broadly used in aluminum melting and/or holding furnaces to enhance the melting rate of scrap aluminum and mixing speed of molten aluminum. In case an EMS is used for a long period of manufacturing, a decrease in the stirring effect is sometimes observed, and one of the reasons is believed to be a penetration phenomenon of molten metal into the furnace lining. In this paper, a simulation model for electromagnetic analysis of melting furnace and thermal fluid dynamic analysis of aluminum ingot melting was developed. Results of electromagnetic field analysis showed that refractory brick, when penetrated by the molten aluminum, shielded the alternating magnetic field. Thermal fluid dynamic analysis indicated quantitatively a time delay in aluminum melting due to a decrease in the electromagnetic stirring force caused by penetration of aluminum into the furnace lining.

1. はじめに

電磁攪拌装置(以下、EMS)は、鉄鋼業をはじめ金属素材製造分野において幅広く実用化されている。アルミニウム鑄造分野では、主に溶解炉や保持炉に導入されており、炉底下部に設置するタイプ、炉側壁に設置するタイプ、炉よりサイドウェルを介して設置するタイプなどさまざまである^{1)~6)}。EMSの原理は、一方向に移動する磁場を炉内に発生させ、アルミニウム溶湯に生じる誘導電流と発生磁場との相互作用によってアルミニウム溶湯に電磁力を作用させることである。その結果として、非接触で溶湯を攪拌混合できるため、溶解速度の向上、成分の均一化、発生ドロスの低減などがEMSの利点である。他方、欠点としては、強力な攪拌力による炉床耐火物の損耗促進(図1)が挙げられる。炉床耐火物の損耗が激しい場合、耐火物の隙間にアルミニウム溶湯が浸透し、

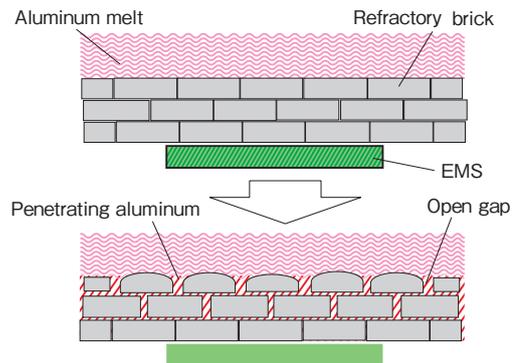


図1 長期間EMS使用による炉床耐火物レンガの損耗
Fig.1 Wearing of refractory brick in the furnace bottom during a long-period operation of EMS.

アルミニウムの磁場遮蔽効果による攪拌力低下が懸念されている。実操業においても、EMSを連続使用していると、攪拌力の低下やアルミニウム塊の溶解遅れを経験

することがある。

これまでEMSの発生磁場および電磁力を数式化し、実測値と比較した報告²⁾や、EMSによる流動を模擬した水モデル実験を行い、実機への設置位置の最適化を図った報告³⁾などがある。しかしながら、アルミニウム浸透現象やそれに伴う攪拌力低下や溶解遅れを理論的に扱った報告は見当たらない。そこで本研究では、炉床耐火物へのアルミニウム浸透によるEMSの攪拌力低下および溶解遅れを定量的に評価できる、耐火物層を含めた溶解炉内の電磁場解析モデルと、電磁力によるアルミニウム溶湯流動とアルミニウム塊の溶解を考慮した熱流動解析モデルを構築し、両者を結び付けて解析を行った。

2. 理論解析モデル

2.1 電磁場解析

図2にEMSを設置した溶解炉内の電磁場解析モデルを示す。EMSから発生する交流磁場を、水平方向(x正方向)に移動する磁場とし、EMS表面から炉内部までを炉床耐火物領域、アルミニウム浸透領域および炉内部領域の3つの領域に分ける。なお、奥行き方向(y方向)は簡略化のため無限遠とし、磁束密度ベクトルはx, z方向のみとする。発生磁場に関する支配方程式は、Maxwellの式から導出される以下の磁場拡散方程式である⁷⁾。

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_e \sigma} \nabla^2 \vec{B} \quad (1)$$

ここで、 \vec{B} は磁束密度ベクトル、 μ_e は透磁率、 σ は導電率である。交流移動磁場の磁束密度ベクトルのz方向成分を以下の式で与える。

$$B_z = B_z(z) \exp j(\omega t - kx) \quad (2)$$

ここで、 k は波数、 ω は角周波数、 j は虚数である。式(2)を式(1)に代入すると、 $B_z(z)$ に関する以下の2階常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 B_z(z)}{dz^2} = (k^2 + j\mu_e \omega \sigma) B_z(z) \quad (3)$$

式(3)を図2に示す各領域間の境界条件(磁束密度の連続性)を元に、解析的に解くと、以下の解を得る⁸⁾。

[領域1] 炉床耐火物領域 ($0 \leq z < z_1$):

$$B_z(z) = B_0 [C_1 \exp(-\beta_1 z) + D_1 \exp(\beta_1 z)] \quad (4)$$

[領域2] アルミニウム浸透領域 ($z_1 \leq z < z_2$):

$$B_z(z) = B_0 [C_2 \exp(-\beta_2 z) + D_2 \exp(\beta_2 z)] \quad (5)$$

[領域3] 炉内部領域 ($z \geq z_2$):

$$B_z(z) = B_0 C_3 \exp(-\beta_3 z) \quad (6)$$

ここで、 B_0 はEMS表面での磁束密度、 C_1 、 D_1 、 C_2 、 D_2 、 C_3 は係数であり、詳細は使用記号欄に記す。また、 β_i は以下の式で与えられ、添え字*i*は各領域を示している。

$$\beta_i^2 = k^2 + j\mu_e \omega \sigma_i \quad (7)$$

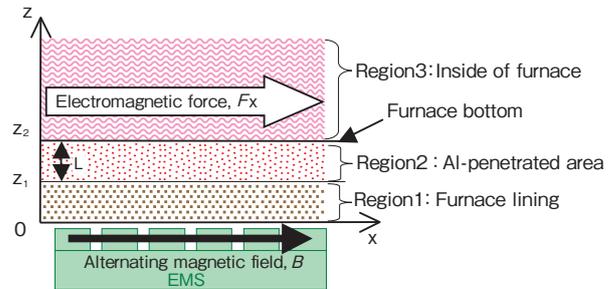


図2 EMSを設置した溶解炉内の電磁場解析モデル
Fig.2 Electromagnetic analysis model of the furnace with EMS.

各領域の導電率 σ_i に関しては、以下のように与える。

[領域1] 炉床耐火物は非導電性物質である:

$$\sigma_1 = 0$$

[領域2] アルミニウム浸透領域の導電率は固体アルミニウムの導電率とアルミニウム体積分率 α の積とする:

$$\sigma_2 = \alpha \times \sigma_{Al(s)}$$

[領域3] 溶解炉内にアルミニウム溶湯がない場合:

$$\sigma_3 = 0$$

溶解炉内にアルミニウム溶湯が有る場合:

$$\sigma_3 = \sigma_{Al(L)}$$

ここで、 $\sigma_{Al(s)}$ は固体アルミニウムの導電率、 $\sigma_{Al(L)}$ は液体アルミニウムの導電率である。なお磁束密度ベクトルのx方向成分 B_x についても B_z と同様に得られる。

溶解炉内のアルミニウム溶湯に作用する電磁力はフレミングの法則によって以下の式で表される。

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (8)$$

ここで、 \vec{j} は誘導電流ベクトルであり、発生磁場より以下の式で得られる。

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_e} \nabla \times \vec{B} \quad (9)$$

図2においてy方向は無限遠と仮定し、磁場勾配はないとしたため、誘導電流ベクトルはy成分のみとなり、以下の式となる。

$$J_y = \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (10)$$

従って、式(8)より得られる電磁力のx方向成分の時間平均値として整理すると、以下の式となる。

$$F_x = \frac{|C_3|^2 B_0^2 \omega \sigma}{2k} \exp(-2\text{Re} \beta_3 z) \quad (11)$$

式(11)がアルミニウム溶湯の駆動力となる。

2.2 熱流動解析

EMSを用いた場合の溶解炉内のアルミニウム溶解挙動をシミュレートするためには、前述の電磁力によって駆動されるアルミニウム溶湯の流れとアルミニウム塊の溶解を考慮した熱流動解析モデルを構築する必要があ

る。熱流動に関する基本式は、擬似圧縮法に基づく質量保存の式 (12)、電磁駆動力と自然対流を考慮した運動量保存の式 (Navier-Stokes の式) 式 (13)～式 (15)、アルミニウム塊の溶解を等価比熱法にて考慮したエネルギー保存の式 (16) である。それぞれを以下に示す。

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + F_x \quad (13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) v = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (14)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) w = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho g \beta_t \Delta T \quad (15)$$

$$\rho \left(C_p - L_h \frac{df}{dT} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) T = \kappa \nabla^2 T + S \quad (16)$$

ここで、 ρ は密度、 c は圧力伝播速度、 $\vec{v} (u, v, w)$ は流体の速度ベクトル、 μ は粘度、 F_x は電磁力、 β_t は体膨張係数、 ΔT は z 方向の温度差、 g は重力加速度、 C_p は比熱、 L_h は潜熱、 κ は熱伝導率、 S は流体せん断エネルギーである。また、 f は固相率で以下の式で与える。

$$f = 1 - \frac{T - T_S}{T_L - T_S} \quad (at \ T_S < T < T_L) \quad (17)$$

$$f = 0 \quad (at \ T \geq T_L) \quad (18)$$

$$f = 1 \quad (at \ T \leq T_S) \quad (19)$$

ここで、 T_S は固相線温度、 T_L は液相線温度である。固相率を導入することでアルミニウム塊の溶解状況を模擬することができる。一般に、電磁攪拌による流動解析には乱流モデルを用いることが多いが^{9), 10)}、本研究では計算負荷低減のため層流モデルを採用した。

図3に示すように、溶解炉は円形炉とし、計算の初期状態としては、直方体のアルミニウム塊(約1トン)を20個配置し、アルミニウム溶湯がアルミニウム塊を完全に覆った状態とした。これは、実操業においても電磁攪拌を開始するタイミングは、溶解材料を装入した後、材料が溶解してアルミニウム溶湯面がある程度形成された時点であることから、妥当な仮定である。温度、流動に関する初期条件および境界条件を以下に示す。

〔初期条件〕

- アルミニウム塊の初期温度は固相線温度。
- アルミニウム溶湯の初期温度は液相線温度。
- アルミニウム溶湯は静止状態。
- 全アルミニウム重量70トン。(内、アルミニウム塊重量20トン)

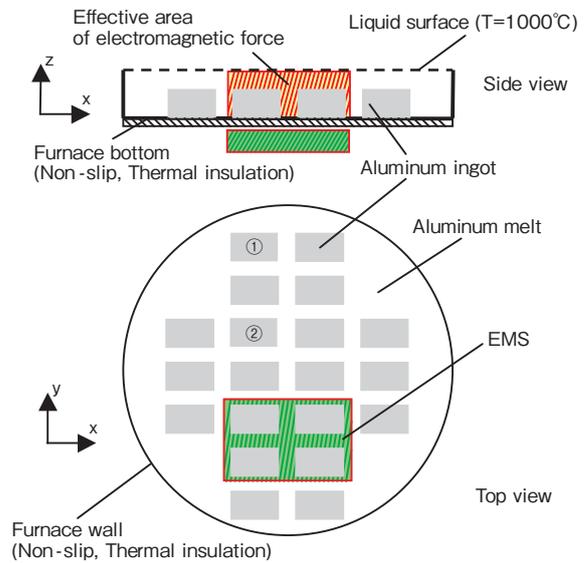


図3 溶解炉内の熱流動解析モデル
Fig.3 Thermal fluid dynamic analysis model of the melting furnace.

表1 計算に用いた3004合金の物性値
Table 1 Physical properties of 3004 alloy used in the calculation.

	Liquid phase	Solid phase
Density (kg/m ³)	2300	2700
Thermal conductivity (W/m · °C)	218	240
Specific heat (kJ/kg · °C)	1.15	0.95
Electrical conductivity (S/m)	4.0 × 10 ⁶	2.4 × 10 ⁷
Viscosity (Pa · s)	1.3 × 10 ⁻³	
Volume expansion coefficient (1/°C)	1.0 × 10 ⁻⁷	
Latent heat (kJ/kg)		389
Liquidus temperature (°C)		648
Solidus temperature (°C)		635
Magnetic permeability (H/m)		4π × 10 ⁻⁷

〔境界条件〕

- 炉壁・炉底・アルミニウム塊表面で流速ゼロ。
- アルミニウム塊自身の移動は考慮しない。
- 溶湯表面の変形は考慮しない。
- 固相率が0.9以上の場合、流速はゼロ。
- 炉壁・炉底は断熱条件。
- 溶湯表面は常に燃焼ガス温度1000°Cで一定。
- 電磁力の作用領域は、EMS直上のみで、式(11)で表される z の関数として与える。

アルミニウム塊を含めた計算領域を直角座標系にて分割し、式(12)～(16)を有限差分法にて、陽的解法にて非定常計算を行った。なお追跡時間については、実際のEMSの運転が定期的に逆回転を行うなど複雑なため、初期溶解挙動のみを計算対象とし、EMS稼働開始から11分後までとした。

3. 解析結果

3.1 磁場解析モデルの妥当性の評価

図4に炉床耐火物へのアルミニウム浸透が存在しない場合の炉内磁束密度分布の計算値と実測値を示す。実測値はEMS中央での z 方向磁束密度の測定結果である。磁場計算に用いた波数 k はEMSの仕様より 1.7 m^{-1} とした。計算値と実測値は良く一致しており、本解析モデルは妥当性があるといえる。発生磁場はEMS表面で最も強く、鉛直方向距離に対して指数関数的に減少する。炉内底部($z/z_2 = 1$)の磁束密度はEMS表面磁束密度 B_0 に対しておよそ30%まで低下する。

3.2 炉床耐火物へのアルミニウム浸透による磁場低下

図5に炉床耐火物にアルミニウムが浸透した場合の磁束密度分布を示す。アルミニウム浸透領域に含まれるアルミニウム体積分率は図1に示される様子から推測して10%と仮定した。図5はアルミニウム浸透距離 L が $1/5z_2 \sim z_2$ と長くなった場合の計算結果であり、アルミニウムの浸透距離が増加するほど、磁場の減衰が大きい。炉床にすべて浸透した場合($L = z_2$)、炉底での磁束密度はEMS表面磁束密度 B_0 に対して16%まで低下する。長期

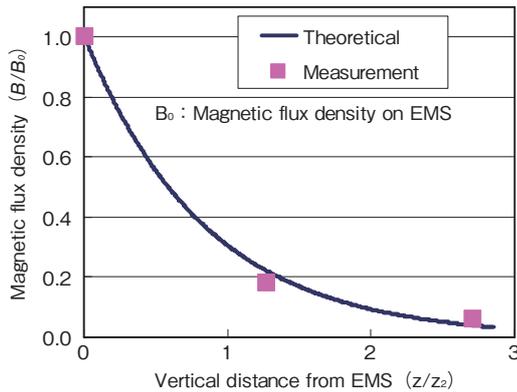


図4 溶解炉内磁束密度の実測値と計算値の比較
Fig.4 Comparison between measured and theoretical values of magnetic flux density.

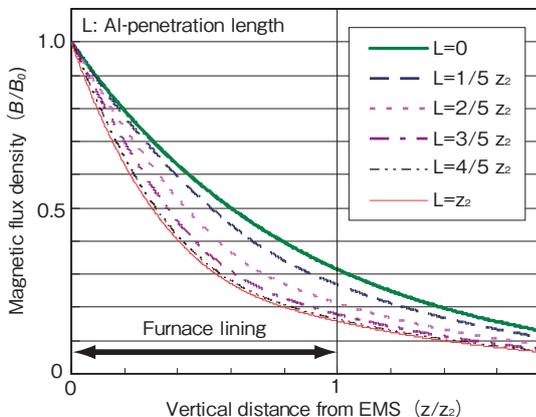


図5 炉床耐火物にアルミニウムが浸透した場合の磁束密度分布
Fig.5 Vertical distribution of magnetic flux density in case aluminum penetrates into the furnace bricks.

間EMSを使用した際の磁場低下の一例として、炉底($z = z_2$)での磁束密度が表面磁束密度 B_0 に対して18%まで低下した場合を考えると、図5より推定されるアルミニウム浸透領域は、炉床耐火物の全厚さのおよそ3/5となる。

3.3 磁束密度によるアルミニウム溶湯の流動およびアルミニウム塊の溶解状況の違い

実際の溶解工程を考える場合、炉内にアルミニウム溶湯が存在するため、領域3の導電率を液体アルミニウムの値にする必要がある。図6に溶解炉内にアルミニウム溶湯が存在する場合の磁場分布を示す。アルミニウム浸透有り($L = 3/5z_2$)、なし($L = 0$)のいずれの条件においても、アルミニウム溶湯が炉内に存在する場合、磁束密度は低下する。熱流動解析では、炉内にアルミニウム溶湯が存在する場合の磁場分布を計算に用いた。

熱流動計算では、正常に磁場が発生している場合(図6(b))、炉底での磁束密度が40%低下した場合(図6(d))、比較のためEMSを使用しない場合の3条件について計算を行った。図7にEMSを稼働させてから約5分半後の炉内アルミニウム溶湯の流動状況および未溶解のアルミニウム塊を示す。EMSが正常に作用している場合、強い流動が発生し、およそ半数のアルミニウム塊が完全に溶解している。磁場低下したEMSの場合には、流動は弱くなり、未溶解のアルミニウム塊は半分以上残っている。一方、EMSなしの場合、アルミニウム溶湯の流動は殆どなく、アルミニウム塊もすべて未溶解のままである。

EMSによって発生する流れの特徴としては、円形炉に沿った周方向の旋回流と、電磁力が作用する前方炉壁の炉底部から溶湯表面に向かう上昇流と後方炉壁の下降流から成る縦方向の循環流を合わせた3次元的な流れである。これは、EMSにより発生する電磁力分布が図6に示されるように炉底部で最も強く、アルミニウム溶湯表面では殆ど大きさを持たないためである。アルミニウム溶

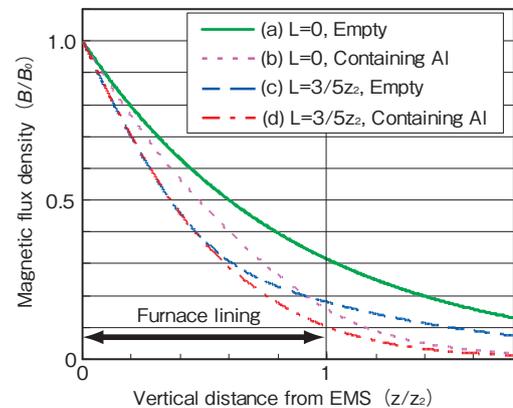


図6 溶解炉内にアルミニウム溶湯が有る場合の磁場分布低下
Fig.6 Decrease in magnetic field in the furnace containing aluminum melt.

湯の縦方向の循環流は、図8(a)に示すように、表面の加熱されたアルミニウム溶湯を炉底まで運び、未溶解のアルミニウム塊の溶解を促進する働きがある。一方、EMSがない場合、燃烧バーナーによって表面のアルミニウム溶湯は高温に達するが、図8(b)に示すように、上面加熱のみであるため熱対流は生じず、熱伝導のみで溶解が進むため、溶解に時間がかかる。実際に、EMSがない溶解炉では未溶解のアルミニウム塊やアルミニウム溶湯を機械的に攪拌する作業が必要となり、大きな作業負荷となっている。

3.4 アルミニウム塊の初期溶解時間の短縮度合

図9に各条件で顕著に差が出た代表的なアルミニウム塊中央底部の温度履歴の計算結果を示す。EMSを使用した場合には、溶解時間の短縮効果が認められ、その効

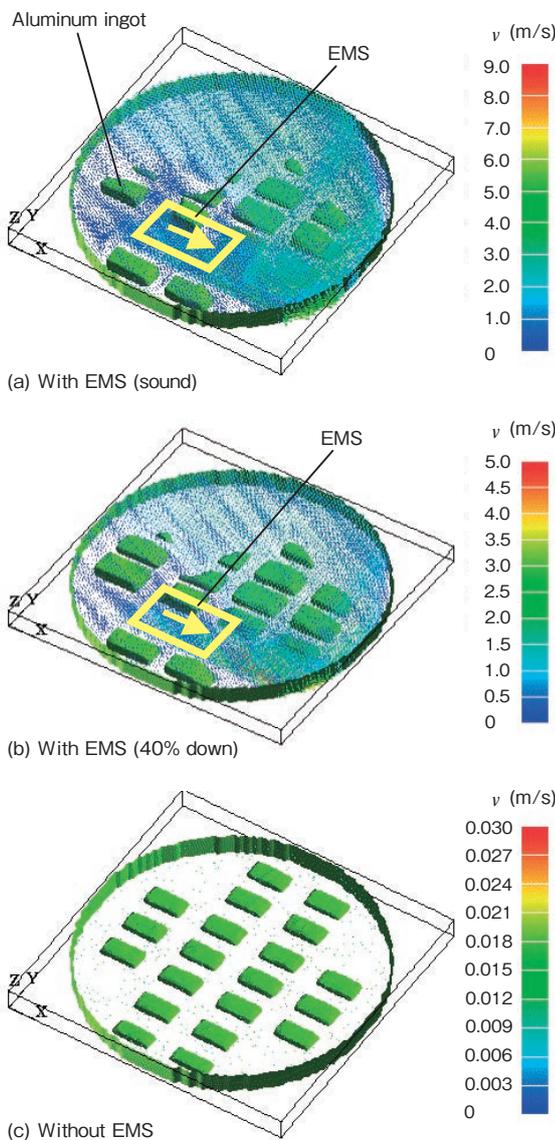


図7 EMS有り(正常, 40%低下)となしの場合における溶解炉内のアルミニウム溶湯流動および未溶解アルミニウム塊の計算結果
Fig.7 Calculated results of aluminum melt flow and non-melted aluminum ingot in the furnace with EMS (sound, 40% down) and without EMS.

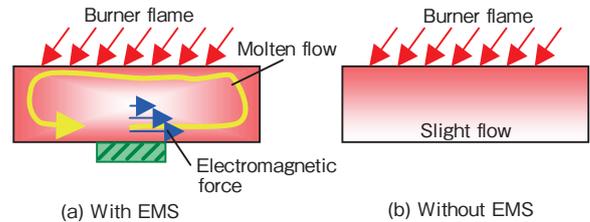


図8 EMS有りとなしによる炉内縦断面でのアルミニウム溶湯流れの違い
Fig.8 Difference in the vertical flow of aluminum melt in the furnace with and without EMS.

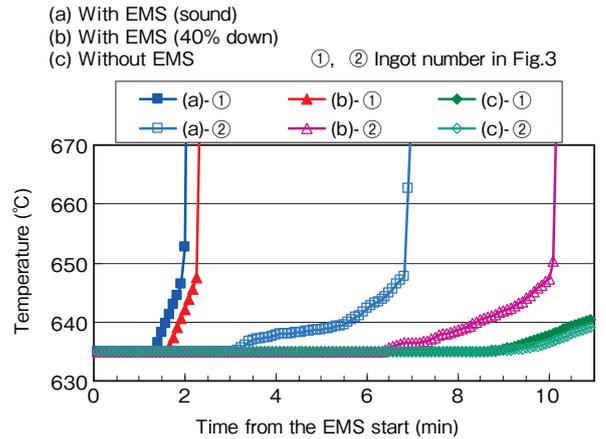


図9 各条件下でのアルミニウム塊中央底部の温度履歴の計算結果
Fig.9 Temperature curves at the center bottom point of aluminum ingots for different conditions.

果はアルミニウム塊の位置によって異なる。アルミニウム塊No.①では、EMSを用いた場合にその強さによらず、攪拌開始後1分半程度で既に溶解し始め、EMSが無い場合と比較して、8分程度短縮している。前述したように、No.①の位置はEMSによるアルミニウム流動の下降流が生じる領域であり、表面で加熱された溶湯が次々に流入してくるからである。

一方、アルミニウム塊No.②では、磁場低下した(b)の場合、正常な(a)の場合と比べて溶解開始時間はおよそ3分半遅れており、磁場低下した場合には十分な強さの下降流が発生しておらず、加熱されたアルミニウム溶湯がNo.②の位置まで十分に到達していないことを示している。従って、耐火物へアルミニウムが浸透し、炉底での磁束密度が低下した場合、アルミニウム塊の初期溶解挙動はアルミニウム塊の位置によって異なる。

実操業においてEMSを使用した場合、EMS開始のタイミングから完全に溶解するまでの時間として、使用しない場合と比較して20~30分の短縮効果が得られている。本研究ではEMSスタート初期の溶解時間の差として計算した結果、EMSを使用した場合の短縮効果は7~8分である。EMS反転を数回繰り返すことを考慮すると、時間短縮効果のオーダーはほぼ合っており、妥当性のある計算結果といえる。

5. おわりに

本研究では、溶解炉に設置した電磁攪拌装置に関する電磁場解析とアルミニウム塊の初期溶解挙動に関する熱流動解析を組み合わせることで、炉床耐火物へのアルミニウム浸透による電磁攪拌効果への影響を定量的に評価できる解析手法を確立した。主な解析結果を以下に示す。

- (1) 炉床耐火物にアルミニウム溶湯が浸透した場合、アルミニウム浸透なしの場合と比較して、炉底で

の磁束密度は低下する。

- (2) EMSによって生じるアルミニウム溶湯の流動は、表面で加熱された溶湯を効率良く炉底部へ輸送し、アルミニウム塊の溶解を促進する役割を果たす。
- (3) EMS使用時にはアルミニウム塊の溶解時間は短縮され、その効果はアルミニウム塊の位置によって異なる。炉底での磁束密度が低下した場合、アルミニウム塊の初期溶解時間の短縮効果も低下する。

使用記号

\vec{B}	: 磁束密度ベクトル
B_0	: EMS表面磁束密度
c	: 圧力伝播速度
C_p	: 比熱
f	: 固相分率
F_x	: 電磁力のx方向成分
g	: 重力加速度
j	: 虚数単位
\vec{j}	: 誘導電流ベクトル
k	: 波数
L	: アルミ浸透距離
L_h	: 溶解潜熱
P	: 圧力
S	: 流体せん断エネルギー
T	: 温度
T_L	: 液相線温度
T_S	: 固相線温度
ΔT	: z方向の温度勾配
$\vec{v} = (u, v, w)$: 流体速度ベクトル
α	: 浸透領域でのアルミ体積分率
β	: 式(7)で表される係数
β_t	: 体膨張係数
κ	: 熱伝導率
μ	: 粘度
μ_e	: 透磁率
ρ	: 密度
σ	: 導電率
$\sigma_{Al(S)}$: 固体アルミの導電率
$\sigma_{Al(L)}$: 液体アルミの導電率
ω	: 角周波数
$C_1 \sim C_3, D_1 D_2$: 下記で表される係数

参考文献

- 鈴木宏志: “アルミ溶解炉への電磁攪拌利用,” AI-ある, 10月号(1981), 59.
- 星加晴雄, 山下隆士: “アルミニウム反射炉用炉底式電磁攪拌装置,” 神鋼電機, 26 (1981), 25.
- 林典史, 犬丸晋, 上原敏彦, 正木克明, 伊藤清文: “アルミニウム溶解炉における電磁攪拌,” 住友軽金属技報, 26 (1985), 31.
- A. F. Saavedra: “Electromagnetic stirrers- Their Influence on Melter Operation and Dross Generation,” Light Metals, TMS, (1993), 739.
- S.Petho: “Experience of ALCOA-KOFEM with MHD Induction Stirrer,” Light Metals, TMS, (1996), 857.
- B. Rydholm and O. Sjoden: “Optimized Furnace Design with Electromagnetic Stirring,” Aluminum Cast House Technology 2005, Ed. J.A.Taylor, I.F. Bainbridge and J.F. Grandfield, TMS, (2005), 193.
- (社)日本鉄鋼協会・材料電磁プロセッシング研究グループ編: 材料電磁プロセッシング, 東北大学出版会, (1999), 85.
- M.Dubke, K.H.Tacke, K.H.Spitzer and K.Schwerdtfeger: “Flow Fields in Electromagnetic Stirring of Rectangular Strands with Linear Inductors: PartI. Theory and Experiments with Cold Models,” Metal. Trans. B, 19 (1988), 581.
- F. Felten, Y. Fautrelle, Y. Du Terrail and O. Metais: “Numerical Modeling of Electromagnetically-Driven Turbulent Flows Using LES Methods,” Fluid Flow Phenomena in Metals Processing, Ed. N-El-Kaddah, TMS, (1999), 571.
- A.Jardy, T.Quatravaux and D.Ablitzer: “The Effect of Electromagnetic Stirring on the Turbulent Flow of Liquid Metal in a Vacuum Arc Remelted Ingot,” Multiphase Phenomena and CFD Modeling and Simulation in Materials Processes, Ed. L. Nastac and B. Li, TMS, (2004), 265.

$$C_1 = \exp(\beta_1 z_1) \{ \beta' \gamma' \exp(\beta_2 (z_2 - z_1)) + \beta \gamma'' \exp(\beta_2 (z_1 - z_2)) \} / Y$$

$$D_1 = \exp(-\beta_1 z_1) \{ \beta \gamma'' \exp(\beta_2 (z_2 - z_1)) + \beta' \gamma' \exp(\beta_2 (z_1 - z_2)) \} / Y$$

$$C_2 = 2\beta_1 \beta' \exp(\beta_2 z_2) / Y$$

$$D_2 = 2\beta_1 \beta'' \exp(-\beta_2 z_2) / Y$$

$$C_3 = 4\beta_1 \beta_2 \exp(\beta_3 z_2) / Y$$

$$D_3 = 0$$

ここで,

$$\beta' = \beta_2 + \beta_3, \beta'' = \beta_2 - \beta_3, \gamma' = \beta_1 + \beta_2, \gamma'' = \beta_1 - \beta_2$$

$$Y = 2(\beta_2 + \beta_3) \{ \beta_2 \sinh(\beta_1 z_1) + \beta_1 \cosh(\beta_1 z_1) \} \exp(\beta_2 (z_2 - z_1))$$

$$+ 2(\beta_2 - \beta_3) \{ -\beta_2 \sinh(\beta_1 z_1) + \beta_1 \cosh(\beta_1 z_1) \} \exp(\beta_2 (z_1 - z_2))$$

である。



高橋 功一 (Koichi Takahashi)
技術研究所



石川 宣仁 (Nobuhito Ishikawa)
技術研究所